Kompetenzbeispiele W-rechnung (Lehrer)

**Augensumme**

|  |
| --- |
| Zwei Würfel werden geworfen und die Augensumme wird ermittelt.  Untersuche, ob das Ereignis „Augensumme 6“ oder „Augensumme 9“ wahrscheinlicher ist. |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| Augensumme 6: (1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1) ⇒ 5 Möglichkeiten  Augensumme 9: (3;6),(4;5), (5;4), (6;3) ⇒ 4 Möglichkeiten  „Augensumme 6“ ist wahrscheinlicher.  oder: p(Augensumme 6) =  p(Augensumme 9) =  ⇒  ⇒ „Augensumme 6“ ist wahrscheinlicher. |
|  |

**baumdiagramm**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ein zweistufiger Zufallsversuch läuft gemäß dem dargestellten Baumdiagramm ab. Zuerst fällt die Wahl auf A oder B, anschließend tritt jeweils X oder Y ein.  Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt: P(A)=0,4, = 0,8, P(B∩Y)=0,42.  Streiche bei den vier unten stehenden Diagrammen jeweils jene Wahrscheinlichkeit durch, welche den gegebenen Wahrscheinlichkeiten oder den allgemeinen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung widerspricht.  Kreuze an, ob das jeweilige Diagramm den gegebenen Sachverhalt richtig oder falsch darstellt.  (1) (2)  **0,7**  **0,6**  **0,4**  **0,2**  Y  X  Y  X  **0,8**  B  A  **0,3**  **0,6**  **0,7**  **0,3**  **0,2**  Y  X  Y  X  **0,8**  B  A  **0,4**   |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **🗆** |  |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **🗆** | |
| **0,6**  **0,4**  X  Y  X  **0,8**  **0,2**  B  A  **0,4**  Y  X  **0,7**  **0,3**  Y  X  **0,2**  **0,8**  B  A  **0,6**  **0,4**  **0,6**  (3) (4)  Y   |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **🗆** |  |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **🗆** | |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (1) (2)  **0,7**  **0,6**  **0,4**  **0,2**  Y  X  Y  X  **0,8**  B  A  **0,3**  **0,6**  **0,7**  **0,3**  **0,2**  Y  X  Y  X  **0,8**  B  A  **0,4**   |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **☒** |  |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **☒** | **🗆** | |
| **0,6**  **0,4**  X  Y  X  **0,8**  **0,2**  B  A  **0,4**  Y  X  **0,7**  **0,3**  Y  X  **0,2**  **0,8**  B  A  **0,6**  **0,4**  **0,6**  (3) (4)  Y   |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **☒** |   Zusätzliche Begründung für die Richtigkeit des Diagramms (2):  P(A) und  können direkt aus der Angabe übernommen werden.  Somit ergeben sich P(B) = 1 - 0,4 = 0,6 und .  Wegen  folgt: , sodass sich schließlich ergibt.   |  |  | | --- | --- | | Das Baumdiagramm ist | | | richtig. | falsch. | | **🗆** | **☒** | |

**Münzwurf**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Eine Münze wird drei Mal geworfen. Z steht für Zahl, W für Wappen.  a) Gib alle möglichen Ausfälle (z.B. ZWZ, …) an.  b) Gib alle Ausfälle an, die zu folgenden Ereignissen E1, E2, E3 gehören:   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | Ereignis | Ausfälle | | E1 | genau zweimal Zahl |  | | E2 | mindestens zweimal Zahl |  | | E3 | niemals Zahl |  |   c) Beschreibe die Gegenereignisse E1’, E2’, E3’ der Ereignisse aus b) verbal und gib ihre Wahrscheinlichkeiten P(E1’), P(E2’) und P(E3’) an:   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | verbal | Wahrscheinlichkeit | | E1’ |  | P(E1’) = | | E2’ |  | P(E2’) = | | E3’ |  | P(E3’) = | |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a) WWW, WWZ, WZW, ZWW, ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ  b)   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | Ereignis | Ausfälle | | E1 | genau zweimal Zahl | ZZW, ZWZ, WZZ | | E2 | mindestens zweimal Zahl | ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ | | E3 | niemals Zahl | WWW | |
| c)   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | mögliche verbale Beschreibung | Wahrscheinlichkeit | | E1’ | Zahl erscheint nie, einmal oder dreimal. | P(E1’) = 1 -  = | | E2’ | Zahl erscheint höchstens einmal. | P(E2’) = | | E3’ | Es erscheint mindestens einmal Zahl. | P(E3’) = 1 -  = | |

**Kaubonbons**

|  |
| --- |
| Bei einem Kindergeburtstagsfest seiner Tochter Isabella gibt Werner 30 Kaubonbons verschiedener Geschmacksrichtungen in einen undurchsichtigen Beutel.  Es gibt 5 Bonbons mit Erdbeer-, 5 mit Kirsch-, 10 mit Zitronen-, 8 mit Orangen- und nur 2 mit Himbeergeschmack.  Isabella liebt Erdbeer- und Zitronengeschmack und „hasst“ Kirschgeschmack. Sie nimmt ohne Hinschauen mit einem Griff drei Bonbons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei gezogenen Bonbons  a) alle drei Erdbeer- oder Zitronengeschmack haben?  b) mindestens eines Kirschgeschmack hat?  c) beide Himbeerbonbons dabei sind? |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a) P(L,L,L) = ≈ 0,112   Die Wahrscheinlichkeit dreimal ein Lieblingsbonbon zu erhalten beträgt 11,2%.   1. P(mindestens einmal Kirsch) = 1 – P(nie Kirsch) = 1 -  ≈ 0,433   Die Wahrscheinlichkeit mindestens ein Bonbon mit Kirschgeschmack zu erhalten ist 43,3%.  c) P(H,H,¬H) + P(H,¬H,H) + P(¬H,H,H) = 3∙ ≈ 0,002  Die Wahrscheinlichkeit beide Himbeerbonbons zu erhalten beträgt 0,2%.  Weitere Lösungswege (z.B. Baumdiagramm) sind möglich. |
|  |

**6 aus 45**

|  |
| --- |
| Seit 1986 wird in Österreich das Lotto-Spiel „6 aus 45“ veranstaltet. Dabei werden bei jeder Ziehung aus den Zahlen 1 bis 45 sechs Zahlen zufällig ausgewählt.  Angenommen, jemand gibt bei einer Spielrunde genau einen Tipp ab, d.h. er kreuzt (natürlich vor der Ziehung) auf dem Spielschein sechs Zahlen an.  a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Spieler bei der Ziehung 6 Richtige zu tippen?  b) In Deutschland werden beim Lotto 6 aus 49 Zahlen gezogen.  Wo ist die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige größer, in Deutschland oder in Österreich? Begründe deine Entscheidung. |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a)  ebenfalls richtige Lösungen:  oder ~ 0,12 ppm  b) Begründung durch Rechnung: 6 aus 49:    Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist in Österreich größer als in Deutschland.  Begründung ohne Rechnung:  Es ist wahrscheinlicher, in Österreich aus weniger Zahlen (45) sechs Richtige zu erraten als in Deutschland aus mehr Zahlen (49). |
|  |

**BATTERIENKAUF**

|  |
| --- |
| Ein Betrieb stellt Batterien für grafikfähige Taschenrechner her. Der Ausschussanteil beträgt 4%. Ausschussstücke treten unabhängig voneinander auf.  Ernst kauft vier Batterien, die in diesem Betrieb hergestellt wurden.  Er behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien kaputt sind, sei kleiner als die Wahrscheinlichkeit im Lotto „6 aus 45“ mit einem Tipp einen „Sechser“ zu erzielen.  Ist diese Behauptung richtig oder falsch? Begründe deine Antwort!  (Einen Sechser zu tippen bedeutet, dass man aus den Zahlen 1 bis 45 von sechs zufällig gezogenen Zahlen alle errät.) |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| Teil 1: Im Lotto einen „Sechser“ tippen.  Es gibt nur einen günstigen Ausfall, da sechs Zahlen getippt und sechs Zahlen gezogen werden.    oder    Teil 2: Alle vier Batterien sind kaputt.  X: Anzahl der kaputten Batterien  p: Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie in Ordnung ist. p = 0,96  p: Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie kaputt ist. p = 0,04    oder:  Ernst hat nicht Recht.  Die Wahrscheinlichkeit, dass von den vier gekauften Batterien keine in Ordnung ist, ist ca. zwanzigmal so groß wie die Chance, einen „Sechser“ zu tippen. |
| 2. Variante für Teil 2: Baumdiagramm  0,96  0,04  0,04  0,04  0,04  0,96  P(B) = 0,044 = 0, 00000256 = |

**Ausschussquote**

|  |
| --- |
| Ein Versandhaus wird von einer Firma mit Artikeln für Haushaltselektronik beliefert, bei denen von einer Ausschussquote von p = 0,06 ausgegangen wird.  a) Eine Lieferung umfasst 200 Stück.  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Lieferung kein defekter Artikel befindet?  b) Nachdem die ersten 50 Stück der Ware verkauft worden sind, werden fünf als defekt reklamiert.  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich fünf defekte Artikel unter den ersten 50 befinden? |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a) P(X=0) = 0,94200 =  ≈ 0  b) P(X=5) = |
|  |

**Multiple Choice 1**

|  |
| --- |
| Bei einem Aufnahmetest werden vier Fragen mit je drei Antwortmöglichkeiten gestellt, wobei jeweils genau eine Antwort richtig ist. Der Kandidat kreuzt rein zufällig jeweils eine Antwort an. Die Zufallsvariable **X** gibt die Anzahl der richtigen Antworten an.  a) Um welche Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen **X** handelt es sich? Begründe deine Antwort.  b) Stelle die Verteilung von **X** grafisch dar. Bestimme den **Erwartungswert** und die **Standardabweichung** von **X**.  c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Antworten richtig anzu­kreuzen? |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a) Es handelt sich um eine Binomialverteilung, denn jede Frage kann nur entweder falsch () oder richtig () beantwortet werden. Bei jeder neuen Frage besteht dieselbe Ausgangssituation (gleiche Voraussetzungen, Bernoulliexperiment).  b) |
| c) |

**Preisverteilung**

|  |
| --- |
| Bei einer Veranstaltung sollen unter 25 Personen fünf Preise verlost werden. In einer Urne befinden sich die 25 Namenskärtchen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer.  Beschreibe den Ablauf der Gewinnermittlung wenn  a) jede Person mehr als einen Preis erhalten kann,  b) jede Person höchstens einen Preis erhalten kann  und gib das jeweils zu Grunde liegende mathematische Modell an. |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| In einer Urne sind 25 Namenskärtchen.  a) Ein Kärtchen wird gezogen, der Name notiert und das Kärtchen in die Urne zurückgelegt. Dieser Vorgang wird insgesamt fünfmal durchgeführt.  Modell: Ziehen mit Zurücklegen  b) Ein Kärtchen wird gezogen, der Name notiert, das Kärtchen aber nicht in die Urne zurückgelegt. Dieser Vorgang wird insgesamt fünfmal durchgeführt.  Modell: Ziehen ohne Zurücklegen |
|  |

**Ziehen mit und ohne Zurücklegen**

|  |
| --- |
| In einer Urne befinden sich 20 Kugeln; 6 davon sind weiß, der Rest ist blau. Es sollen fünf Kugeln gezogen werden.  Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass unter den fünf gezogenen Kugeln genau zwei weiße sind, haben zwei Schülerinnen folgende Ansätze geschrieben:  Ansatz A:  Ansatz B:  a) Welcher Ansatz passt zum Ziehen ohne Zurücklegen?  b) Welcher Ansatz passt zum Ziehen mit Zurücklegen?  c) Erkläre die Bedeutung der Ausdrücke , 0,3², 0,7³ des Ansatzes A.   1. Erkläre die Bedeutung der Ausdrücke , ,  des Ansatzes B.   Erkläre zusätzlich die Bedeutung des Zählers und des Nenners. |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a) Ansatz B geht von einem Ziehen ohne Zurücklegen aus (Ziehen mit einem Griff).  b) Ansatz A geht von einem Ziehen mit Zurücklegen aus. Es liegt eine Binomial­verteilung vor.  c) Der Binomialkoeffizient  ergibt die Anzahl der möglichen Pfade. 0,3 ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen; da zwei weiße Kugeln gezogen werden müssen, folgt aus dem Multiplikationssatz 0,32. 0,7 ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen (Gegenwahrscheinlich­keit); da drei blaue Kugeln gezogen werden, folgt aus dem Multiplikationssatz 0,73.  d) Als Definition der Wahrscheinlichkeit wird der Quotient aus der Anzahl der günstigen Ausfälle und der Anzahl der möglichen Ausfälle verwendet. Der Binomialkoeffizient  ergibt die Anzahl der Möglichkeiten, von sechs weißen Kugeln zwei zu ziehen, der Binomialkoeffizient  die Anzahl der |
| Möglichkeiten, von 14 blauen Kugeln drei zu ziehen, der Binomialkoeffizient  die Anzahl der Möglichkeiten, von 20 Kugeln fünf zu ziehen. |

**spielrunde**

|  |
| --- |
| Eine Spielrunde besteht aus 9 Personen. Jede dieser Personen kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % zu den wöchentlichen Treffen.  Aus Erfahrung weiß man, dass das Treffen mehr als zwei Stunden dauert, wenn mindestens zwei Drittel der Personen anwesend sind.  Unter den 9 Personen sind vier etwas streitlustiger. Wenn zwei dieser streitlustigeren Personen anwesend sind, kommt es beim Treffen mit Sicherheit zum Streit.  a) Wie viele Personen kann man durchschnittlich bei einem Treffen erwarten?  b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Treffen mehr als zwei Stunden dauert?  c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem Streit kommt? |

**Möglicher Lösungsweg**

|  |
| --- |
| a)  Man kann mit 6 bis 7 Personen rechnen.  b) Damit das Treffen mehr als zwei Stunden dauert, müssen mindestens 6 der 9 Personen anwesend sein: Binomialverteilung mit n = 9, p = 0,75    Die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Treffen mehr als zwei Stunden dauert, beträgt ca. 83,4%.  c) Zu einem Streit kommt es, wenn mindestens zwei der vier streitlustigeren Personen anwesend sind: Binomialverteilung mit n = 4, p = 0,75    Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 94,9 % kommt es zu einem Streit. |
|  |