Übungen Extremwertaufgaben

1. Einer Kugel mit dem Radius R ist eine gerade quadratische Pyramide vom größten Volumen einzuschreiben! (a=h=$\frac{4R}{3}$)

2. Einer Kugel vom Radius R ist ein koaxialer Kegel mit größtem Volumen V einzuschreiben.

3. Einem Halbkreis mit Radius r ist ein Rechteck mit maximaler Fläche einzuschreiben.

4. Dem spitzwinkligen Dreieck ABC mit der Seite c und der Höhe h ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, dass eine Rechteckseite auf c zu liegen kommt.

5. Einem Drehkegel (r, h) soll ein Drehzylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben werden.

6. Einem Kegel (R, H) soll ein Zylinder mit möglichst großem Mantel eingeschrieben werden. (M=$\frac{R\pi H}{2}$)

7. Einer Halbkugel vom Radius R ist der inhaltsgrößte Drehkegel einzuschreiben, dessen Spitze (h=$\frac{R\sqrt{3}}{3}$)

8. Schreibe einer Kugel mit dem Radius 6 (bzw. R) einen geraden Kreiszylinder von größtem Volumen ein! (r=2$\sqrt{6}$)

9. Einer Halbkugel vom Radius R ist ein Zylinder von größtem Volumen einzuschreiben! (r=$\frac{R\sqrt{6}}{3}$)

10. Eine Firma will Pfirsichkompottdosen (=Drehzylinder) mit 1 Liter Inhalt herstellen. Das Material für die Mantelflächen kostet 20GE pro m² und jenes für die Grund- und Deckfläche 30 GE pro m². Bestimme die Abmessungen der Dose so, dass die Herstellungskosten minimal werden. Welche Materialkosten entstehen pro Dose? (r=4,7cm; h=14cm; Kosten: 1,2674GE)

11. Eine Ölkanne soll die Form eines Zylinders (r, h) mit aufgesetztem Kegel (r, H) erhalten und ein Volumen von 384πE^3 haben. Die Höhe des Kegels soll sich zum Radius wie 4:3 verhalten. Wie viel Blech wird für die Erzeugung einer solchen Ölkanne benötigt, wenn die Ausmaße so gewählt werden, dass der Materialverbrauch möglichst gering ist?

12. Eine Eprouvette hat die Form eines Drehzylinders mit angesetzter Halbkugel. Ihre Innenmaße betragen 129mm Länge und 18mm Durchmesser. Berechne unter Vernachlässigung der Wandstärke um wie viel Prozent weniger Glas man benötigen würde, wenn man Länge und Durchmesser so abändern würde, dass bei gleichem Volumen der Materialverbrauch minimal wird! Ist eine solche Eprouvette sinnvoll?

13. Die Parabel mit der Gleichung $y=ax^2+bx+c$ hat in S(0/-6) den Scheitel und geht durch den Punkt A(4$\sqrt{3}$/2). Das unter der x-Achse liegende Parabelsegment rotiert um die y-Achse. Diesem Paraboloidsegment ist ein Drehzylinder mit maximalem Volumen koaxial einzuschreiben! (V=54πE^3)

14. Einem Kreis k: $x^2 + y^2 = 25$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck so einzuschreiben, dass dessen Basis parallel zur x-Achse liegt und sein Flächeninhalt A maximal wird.

15. Der Ellipse ell: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt A so einzuschreiben, dass die Höhe auf der großen Achse liegt.

16. In die Ellipse $4x^2+9y^2=36$ ist ein gleichschenkliges Dreieck so einzuschreiben, dass dessen Basis parallel zur Hauptachse liegt und sein Flächeninhalt maximal wird

17. In die Ellipse $4x^2+9y^2=36$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck so einzuschreiben, dass dessen Basis parallel zur Nebenachse liegt und sein Flächeninhalt maximal wird. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks!

18. Ein Blechbehälter hat die Form eines Drehzylinders mit aufgesetzter Halbkugel. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit der Blechverbrauch bei gegebenem Volumen $V=45\pi cm^3$ möglichst gering ist? Weise das Minimum auch nach!

19. Zwei Landstraßen kreuzen einander rechtwinkelig. Auf einer Straße befindet sich ein Wanderer 10km von der Kreuzung entfernt (Punkt *A*). Sein Ziel ist der Punkt *B*, der sich auf der anderen Straße 6km vom Kreuzungspunkt entfernt befindet. Da er es eilig hat, beschließt er, von seiner Straße abzuzweigen und querfeldein in direkter Richtung auf sein Ziel loszusteuern. Er schätzt nun die Gehgeschwindigkeit auf der Straße auf 5km/h, die Geschwindigkeit querfeldein jedoch nur auf 4km/h. Wo muss er von seiner Straße abzweigen, um möglichst schnell sein Ziel zu erreichen? Um wie viel verkürzt sich dadurch die Strecke bis zum Ziel und wie groß ist die Zeitersparnis?
Wie lässt sich nachweisen, dass die gefundene Lösung tatsächlich das Minimum ist?

20. Schneidet man die Hyperbel $25x^2-4y^2=100$ mit der Geraden x=7, so entsteht ein Hyperbelsegment. In dieses Hyperbelsegment ist ein Rechteck von möglichst großem Flächeninhalt einzuschreiben. ($A=30\sqrt{3}$)

21. Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen? (Antwort: $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$)

22. Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt A und möchte möglichst schnell zu einem Punkt B auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt C des Lotes von A auf die Straße hat von A die Entfernung 400m und die Entfernung B nach C betrage **a)** 1000m **b)** 100m. Auf der Straße kann sich der Fußgänger doppelt so schnell fortbewegen wie auf dem Acker. Welchen Weg soll er einschlagen? (a) Acker: 461,8m; b) diagonal)

23. Öl wird in zylinderförmigen Dosen abgefüllt.

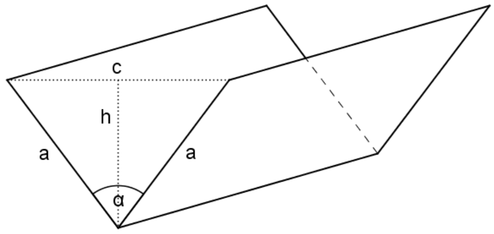
a) **a)** Gib eine Funktionsgleichung (Formel) für die Oberfläche O(x) solcher Dosen in Abhängigkeit vom Radius x an, wenn das Volumen 1 Liter beträgt.

b) **b)** Zeichne den Graphen dieser Funktion O(x) in einem für die Problemstellung geeigneten Intervall mit Achsenbeschriftung und Einheiten (bei Technologie-nutzung: Dokumentation).

c) Bestimme den Radius x, für den die Oberfläche O(x) möglichst klein ist.

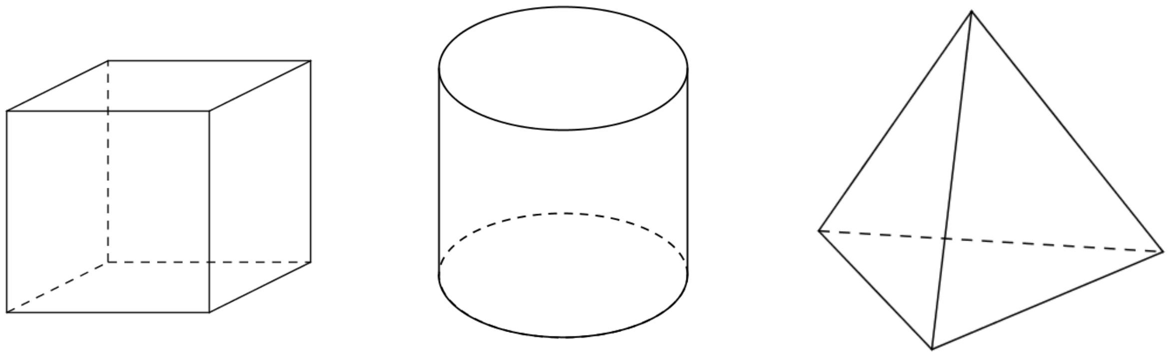
24. Aus zwei gleich breiten Brettern (Breite a) wird eine Rinne mit möglichst großer dreieckiger Querschnittsfläche gebildet.

Zeige, dass der Inhalt dieser Querschnittfläche $\frac{a^2}{2}$ beträgt.



25. Ein Liter Saft soll abgefüllt werden. Als mögliche Verpackungsformen stehen folgende geometrische Körper zur Verfügung:

A) Würfel B) Drehzylinder C) Regelmäßiges Tetraeder



a) Zeige, dass für den Drehzylinder mit kleinster Oberfläche die Höhe h gleich dem Durchmesser d ist.

b) Berechne die Kantenlängen von Würfel und Tetraeder sowie Radius und Höhe des Zylinders (d = h)

c) bei einem Liter Fassungsvermögen.

d) Volumen des Tetraeders mit der Kantenlänge a: $V_T = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$

e) Berechne die Oberflächen der Körper aus b) und ordne sie der Größe nach.